

Statistical analysis of error in measurement

When we measure any physical quantity our measurements are effected by a multi factors, must be used statistic method in analyze an error.

عند قياس أي كمية فيزيائية سيتأثر القياس بالعديد من العوامل، يجب استخدام طريقة إحصائية في تحليل الخطأ.

1. **Arithmetic mean** : The sum of a set of numbers divided by the total number of pieces of data.

الوسط الحسابي : مجموع مجموعة من الأرقام مقسوماً على عدد تلك الأرقام.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n x_n$$

Where:

x_n = nth reading taken.

n = total number of readings.

2. **Deviation**: The difference each piece of test data and the arithmetic mean.

الانحراف: الفرق بين كل قيمة من بيانات الاختبار والمتوسط الحسابي

$$d_n = x_n - \bar{x}$$

3. **The average deviation**: is an indication of the precision of the instrument used in measurement or the sum of the absolute values of the deviation divided by the number of readings.

متوسط الانحراف: هو مؤشر دقة الأجهزة المستخدمة في القياس مجموع القيم المطلقة لانحراف مقسوماً على عدد القراءات.

$$D = \frac{|d_1| + |d_2| + |d_3| + \dots + |d_n|}{n}$$

Where:

$|d_1| + |d_2| + |d_3| + \dots + |d_n|$ = absolute value of deviations.

4. The standard deviation: is the square root of the sum of all the individual deviations squared, divided by the number of readings.

الانحراف المعياري: هو الجذر التربيعي لمجموع كل الانحرافات الفردية التربيعية مقسوماً على عدد القراءات.

$$S = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}{n}}$$

For small readings ($n < 30$) the denominator is $(n - 1)$.

للقراءات الصغيرة ($n < 30$) يكون المقام $(n - 1)$

Example: From the following data ($X_1 = 49.7$, $X_2 = 50.1$, $X_3 = 50.2$, $X_4 = 49.6$, $X_5 = 49.7$),

calculate:

- Arithmetic mean,
- Deviation of each value,
- Algebraic sum of the deviations
- Calculate the average deviation,

e) Calculate the standard deviation.

$$a) \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{n} = \frac{49.7 + 50.1 + 50.2 + 49.6 + 49.7}{5} = \frac{249.3}{5} = 49.86$$

$$b) d_1 = X_1 - \bar{X} = 49.7 - 49.86 = -0.16, d_2 = 50.1 - 49.86 = 0.24, d_3 = 50.2 - 49.86 = 0.34, \\ d_4 = 49.6 - 49.86 = -0.26, d_5 = 49.7 - 49.86 = -0.16.$$

$$c) d_{\text{total}} = -0.16 + 0.24 + 0.34 - 0.26 - 0.16 = 0$$

$$d) D = \frac{|d_1| + |d_2| + |d_3| + |d_4| + |d_5|}{n} = \frac{0.16 + 0.24 + 0.34 + 0.26 + 0.16}{5} = 0.232$$

$$e) S = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.292}{4}} = \sqrt{0.073} = 0.72$$

Limiting Error

Most manufacturers of measuring instrument state that an instrument is accurate within a certain percentage of a full-scale reading.

For example, the manufacturer of a certain voltmeter may specify the instrument to be accurate within $\pm 2\%$ with full-scale deflection.

معظم الشركات المصنعة لأجهزة القياس تذكر أن الأجهزة دقيقة ضمن نسبة مئوية معينة من القراءة الكاملة. على سبيل المثال، قد تحدد الشركة المصنعة لمقياس جهد معين تكون دقة الأجهزة في حدود $\pm 2\%$ مع انحراف كامل النطاق.

Example: A 300V voltmeter is specified to be accurate within ± 2 at full-scale, Calculate the limiting error when the instrument is used to measure a 120V source. The magnitude of the limiting error is:

$$\text{Limiting error} = \text{accuracy} \times \text{full-scale} = 0.02 \times 300 = 6V$$

$$\text{Limiting error \%} = \frac{\text{Limiting error}}{\text{Reading}} \times 100 \% = \frac{6}{120} \times 100\% = 5\%$$

H.W. / 1

600V voltmeter is specified to be accurate within $\pm 2\%$ at full scale. Calculate the limiting error when the instrument is used to measure a voltage of 250V.

Example: A 0 to 150V voltmeter has accuracy of 1% of full-scale reading. The theoretical (true) expected value we want to measure it is 83V.

Determine the practical (measured) value and the percentage of error.

Sol.:

$$\text{Tolerance} = \text{accuracy} \times V_{\text{FSD}} = 1\% \times 150 = 1.5V$$

$$\text{Measured value} = \text{true} \pm \text{tolerance} = 83 \pm 1.5 = 84.5V \text{ Or } 81.5V$$

The percentage of error is:

$$\text{Errors} = \frac{|\text{true} - \text{measured}|}{\text{true}} \times 100\% = \frac{|83 - 84.5|}{83} \times 100\% = 1.81\% \text{ Or } \frac{|83 - 81.5|}{83} \times 100\% = 1.81\%$$

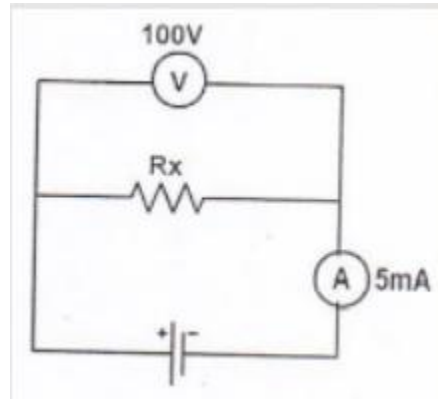
$$\text{Or Error} = \frac{|\pm \text{Tolerance}|}{\text{true}} \times 100\% = \frac{|\pm 1.5|}{83} \times 100\% = 1.81\%$$

If we want to measured another readings on the same range and determine the error. Suggest we take true 60V and 30V.

$$\text{Error} = \frac{|\pm \text{Tolerance}|}{\text{true}} \times 100\% = \frac{|\pm 1.5|}{60} \times 100\% = 2.5\%, \text{ Error} = \frac{|\pm 1.5|}{30} \times 100\% = 5\%$$

Example: To measured unknown resistor by ammeter and voltmeter method. A voltmeter of sensitivity $1000 \Omega/V$, connect in parallel with the resistor reads $100V$ on its $150V$ scale (range), while the series ammeter read $5mA$.

Calculate the apparent value of the resistor, actual value, and the error.



Sol.:

1- The apparent value of the resistor is: $R_{ap.} = \frac{V}{I} = \frac{100}{5mA} = 20K\Omega$

2- The actual of the resistor by taking the resistance of voltmeter in consider is:

$$R_V = 1000 \frac{\Omega}{V} \times 150V = 150K\Omega$$

$$R_{act.} = \frac{R_{ap.} \times R_V}{R_V - R_{ap.}} = \frac{20 \times 150}{150 - 20} = 23.05K\Omega$$

3- The percent error is: $\text{Error} = \frac{\text{actual} - \text{apparent}}{\text{actual}} \times 100\% = \frac{23.05 - 20}{23.05} \times 100\% = 13.22\%$

Moving Coil Instruments

There are two types of moving coil instruments namely, **permanent magnet** moving coil type which can only be used for direct current, voltage measurements and the **dynamometer type** which can be used on either direct or alternating current, voltage measurements.

هناك نوعان من أجهزة الملف المتحرك وهما، نوع الأول **الملف المغناطيس الدائم المتحرك** والذي يمكن استخدامه للتيار المباشر وقياسات الجهد ونوع الثاني **داينموميتر** والذي يمكن استخدامه في التيار المباشر او المتناوب وقياسات الجهد.

Permanent Magnet Moving Coil Mechanism (PMMC): In PMMC meter or (D'Arsonval) meter or galvanometer all are the same instrument, a coil of fine wire is suspended in a magnetic field produced by permanent magnet. According to the fundamental law of electromagnetic force, the coil will rotate in the magnetic field when it carries an electric current by electromagnetic (EM) torque effect.

آلية ملف المغناطيس الدائم المتحرك PMMC في هذه الجهاز او (دارسونفال) يتم تعليق ملف من الأسلاك الدقيقة في مجال مغناطيسي يتم انتاجه بواسطة مغناطيس دائم . وفق للقانون الاساسي للقوة الكهرومغناطيسية يدور الملف في المجال المغناطيسي عندما يمر تيار كهربائي فيه متأثراً بعزم الدوران الكهرومغناطيسي

Mathematical Representation of PMMC Mechanism:

Assume there are (N) turns of wire and the coil is (L) in long by (W) in wide. The force (F) acting perpendicular to both the direction of the current flow and the direction of magnetic field is given by:

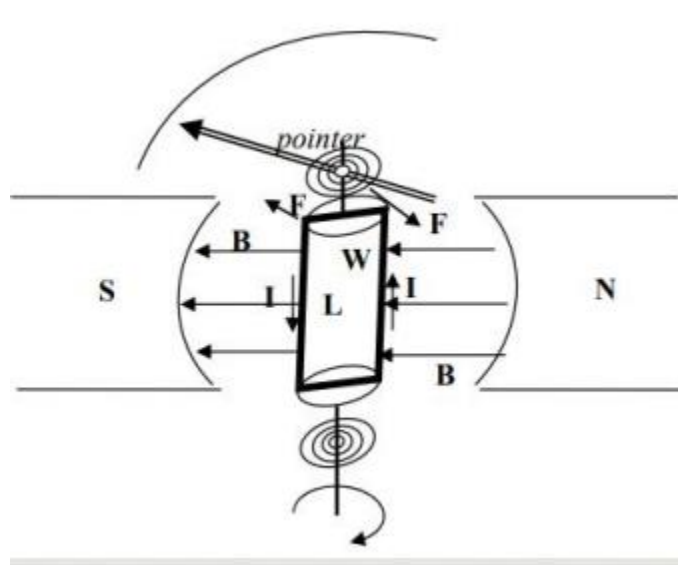
التمثيل الرياضي ل : PMMC افترض أن هناك لفات من الأسلاك عددها (N) في الملف وأن الملف طوله (L) وعرضه (W) تُعطى القوة (F) التي تعمل بشكل عمودي على كل من اتجاه التدفق الحالي واتجاه المجال المغناطيسي من خلال :

$$F = N \cdot B \cdot I \cdot L$$

Where:-

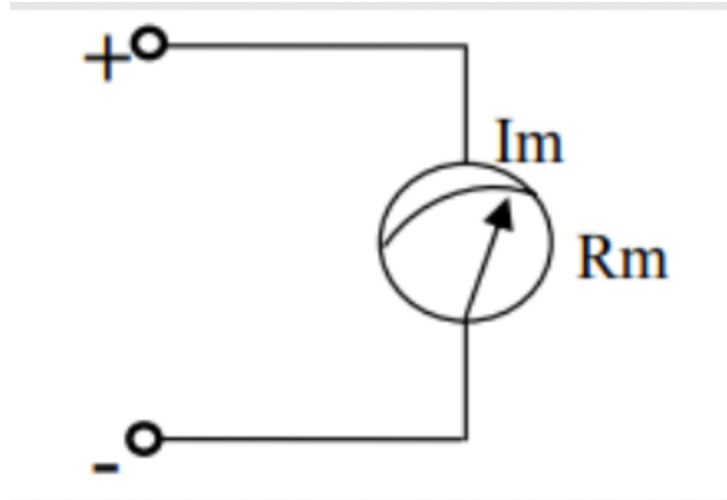
N: turns of wire on the coil, I: current in the movable coil B: flux density in the air gap, L: vertical length of the coil Electromagnetic torque is equal to the multiplication of force with distance to the point of suspension:

$T_{I1} = NBIL$ in one side of cylinder, $T_{I2} = NBIL$ in the other side of cylinder The total torque for the two cylinder sides: $T_I = 2[NBIL] = NBILW = NBILA$ where A: effective coil area



1- D.c Ammeter: An Ammeter is always connected in series with a circuit branch and measures the current flowing in it. an ideal ammeter would be capable of performing the measurement without changing or distributing the current in the branch but real ammeters would possess some internal resistance.

اميتر التيار المستمر: يتم توصيل الأميتر للتيار الكهربائي دائما باسلاك بفرع الدائرة وقياس التيار المتدفق فيه. ، حيث يكون مقياس التيار المثالي قادراً على إجراء القياس دون تغيير أو توزيع التيار في الفرع، لكن الأميترات الحقيقية تمتلك بعض المقاومة الداخلية.



Extension of Ammeter Range: Since the coil winding in PMMC meter is small and light, they can carry only small currents (μA - 1mA). Measurement of large current requires a shunt external resistor to connect with the meter movement, so only a fraction of the total current will pass through the meter.

نظراً لكونه صغير وخفيف و لفات الملف في مقياس PMMC، فيمكنه حمل التيارات الصغيرة فقط (μA - 1mA) يتطلب قياس التيار الكبير وجود مقاوم خارجي تحاول الاتصال عبرها، لذلك فقط جزء بسيط من التيار الأجمالي سوف يمر عبر المقياس.

Example: If PMMC meter have internal resistance of (10Ω) and full scale range of 1mA . Assume we wish to increase the meter range to 1A .

Sol. So we must connect shunt resistance with the PMMC meter of

$$R_{sh} = 0.01001\Omega$$

$$R_{sh} = \frac{I_m R_m}{I_T - I_m} = \frac{1 \times 10^{-3} \cdot 10}{1 - 1 \times 10^{-3}} = 0.01001\Omega$$